अध्यायः 2

एकचरणान्वितं रैखिक-समीकरणम्

2.1 भूमिका

पूर्वतनकक्ष्यायां, भवन्तः अनेक-बीजीय-व्यञ्जकविषये अथ समीकरणविषये ज्ञातवन्तः। दृष्टानां व्यञ्जकानां कानिचन उदाहरणानि सन्ति

$$5x,\ 2x-3,\ 3x+y,\ 2xy+5,\ xyz+x+y+z,\ x^2+1,\ y+y^2$$

समीकरणानां कानिचन उदाहरणानि - $5x=25,\ 2x-3=9,\ 2y+\frac{5}{2}=\frac{37}{2},\ 6z+10=-2$

भवन्तः स्मरन्ति खलु यत् समीकरणेषु सदैव ‘ = ‘इति चिह्नस्य चिह्नस्य प्रयोगः भवति यत् व्यञ्जकेषु न भवति।

एतेषु व्यञ्जकेषु केषुचित् एकाधिकाः चरप्रयोगाः सन्ति। उदाहरणार्थं - $2xy+5$ इत्यस्मिन् चरद्वयं वर्त्तते तथापि वयं साम्प्रतं समीकरण-निर्माणे केवलम् एकचरीय-व्यञ्जकस्यैव प्रयोगं करिष्यामः तथा ते व्यञ्जकाः समीकरण-निर्माणे प्रयुक्ताः व्यढ्जकाः रैखिकाश्च भविष्यन्ति। तात्पर्यम् एतदेव यत् व्यञ्जकेषु प्रयोक्तव्यानां चराणां अधिकतमः घातः एकः एव भविष्यति।

केचन रैखिक-व्यञ्जकाः सन्ति -

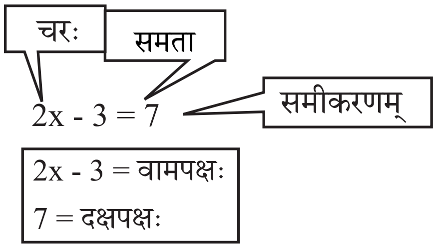
$$2x,\ 2x+1,\ 3y-7,\ 12-5z,\ \frac{5}{4}(x-4)+10$$

एते रैखिक-व्यञ्जकाः न सन्ति $-x^2+1,\ y+y^2,\ 1+z+z^2+z^3$

(ध्यानं ददतु यत् चरस्य अधिकतमः घातः 1 इत्यतः अधिकः अस्ति)

साम्प्रतं वयं समीकरणेषु एकचरीय-व्यञ्जकानां प्रयोगं कुर्मः। एतादृशानि समीकरणानि एकचरीय-रैखिक-समीकरणानि कथ्यन्ते। पूर्वतनकक्ष्यासु यादृशानि सरलानि समीकरणानि भवद्भिः समाधितानि तानि एतादृशानि एव आसन्। आगच्छन्तु यत् वयं जानीमः तत् संक्षिप्तेन पुनरावलोकनं कुर्मः:-

(a) एकबीजीय-समीकरणे चराणां प्रयोग-समये एका समता भवति। अस्मिन् एकं समतायाः चिह्नं भवति। अस्याः समतायाः वामभागीय-व्यञ्जकः वामपक्षः तथा दक्षभागीय-व्यञ्जकः दक्षभागः कथ्यते।



(b) एकस्मिन्-समीकरणे वामपक्षे व्यञ्जकस्य मानं दक्षपक्षे व्यञ्जकमानस्य समानमेव भवति। इत्थं चराणां केषाञ्चित् मानानां कृते एव सम्भवं भवति तथा चराणां एतादृश-मानानाम् एव चराणां समाधानं कथ्यते।

2x - 3 = 7 इत्यस्य समीकरणस्य समधानं वर्तते। x = 5 यतो हि x = 5 एवं सति वामपक्षस्य मानंभविष्यति (2×5)-3=7 एतत् दक्षपक्षस्य मानम् अस्ति परन्तु x = 10 अस्य समाधानं नास्ति, यतो हि x = 10 इति सति वामपक्षस्य मानं भविष्यति (2×10) -3=17 एतत् दक्षपक्षस्य समानं नास्ति।

(c) कस्यापि समीकरणस्य समाधानं कथं ज्ञातव्यम्? वयं मन्यामहे यत् समीकरणस्य उभयः पक्षः तुलायाः उभयः पक्षः इव संतुलने अस्ति। अतः वयं उभय-पक्षे साम्यां गणितीय-सङ्क्रियां कुर्मः यस्मात् समीकरणस्य संतुलनं सम्यक् स्यात्, असमीचीनं न भवेत् परन्तु समीकरणं सरलं सरलतरञ्च स्यात्। एवमेव केषाञ्चित् चरणानाम् अनन्तरं समीकरणस्य समाधानं प्राप्नुमः।

2.2 समीकरण-साधनं, यस्य एकस्मिन् पक्षे रैखिक-व्यञ्जकः अथ अपरस्मिन् पक्षे केवलं संख्या स्यात्

किञ्चित् उदाहरणं स्वीकृत्य समीकरणानां समाधान-विधिं पुनः ध्याने आनयामः। समाधानेषु ध्यानं ददतु। समाधानरूपे काञ्चित् परिमेय-संख्यां प्राप्तुं शक्नुवन्ति।

उदाहरणम् 1 समाधानं जानातु $2x - 3 = 7$

समाधानम्

चरणम् 1 उभयोः पक्षयोः 3 संख्यां योजयामः -

$$2x - 3 + 3 = 7 + 3$$

$$2x = 10$$ (असंतोलनं न जातम्)

अथवा

चरणम् 2 उभयोः पक्षयोः 2 इत्यनेन विभाजयामः।

$$\frac{2x}{2} = \frac{10}{2}$$

अथवा $x=5$ (अपेक्षितं समाधानम्)

उदाहरणम् 2 समाधानं जानातु $2y + 9 = 4$

समाधानम् 9 इत्यस्य दक्षपक्षे पक्षान्तरणे कृते सति।

$$2y = 4 - 9$$

अथवा $2y = - 5$

उभयोः पक्षयोः 2 इत्यनेन विभाजयामः। $y = \frac{-5}{2}$ (समाधानम्)

समाधानस्य परीक्षणम् -

वामपक्षः $= 2\left(\frac{-5}{2}\right) + 9 = -5+9=4=$ दक्षपक्षः

किं भवन्तः ध्यानं दत्तवन्तः यत् $\frac{-5}{2}$ एका परिमेय-संख्या अस्ति। सप्तम-कक्ष्यायां यत् समीकरणं समाधितवन्तः तस्य समाधानम् ईदृशं संख्यात्मकं नासीत्।

उदाहरणम् 3 समाधानं जानातु $\frac{x}{3} + \frac{5}{2} = -\frac{3}{2}$

समाधानम् $\frac{5}{2}$ इत्यस्य दक्षपक्षे पक्षान्तरणे कृते सति $\frac{x}{3} = \frac{-5}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{8}{2}$

अथवा $\frac{x}{3} = -4$

उभयोः पक्षयोः 3 इत्यनेन गुणयामः चेत् $x= - 4 \times 3$

अथवा $x = -12$ (समाधानम्)

परीक्षणम् -

वामपक्षः $= -\frac{12}{3} + \frac{5}{2} = -4 + \frac{5}{2} = \frac{-8+5}{2} = \frac{-3}{2} =$ दक्षपक्षः (यथा इच्छति)

ध्यानं ददतु समीकरणे चरस्य गुणाङ्कः इत्यनेन गुणयामः चेत् सदैव एकः पूर्णाङ्कः एव स्यात् इति आवश्यकता नास्ति।

उदाहरणम् 4 समाधानं कुर्वन्तु $\frac{15}{4} - 7x = 9$

समाधानम् ज्ञातमस्ति - $\frac{15}{4} - 7x = 9$

अथवा $-7x = 9 - \frac{15}{4}$ ($\frac{15}{4}$ इत्यस्य दक्षपक्षे पक्षान्तरणे कृते सति।)

अथवा $-7x = \frac{21}{4}$

अथवा $x = \frac{21}{4 \times (-7)}$ (उभयोः पक्षयोः -7 इत्यनेन भागाकारे सति)

अथवा $x = -\frac{3 \times 7}{4 \times 7}$

अथवा $x = -\frac{3}{4}$ (अपेक्षितं समाधानम्)

परीक्षणम् -वामपक्षः $\frac{15}{4} - 7\left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{15}{4} + \frac{21}{4} = \frac{36}{4} = 9$ दक्षपक्षः (यथा इच्छति)

प्रश्नावली 2.1

निम्नसमीकरणानां समाधानं कुर्वन्तु -

1. $x-2 = 7$ **2.** $y+3 = 10$ **3.** $6 = z+2$

4. $\frac{3}{7} + x = \frac{17}{7}$ **5.** $6x = 12$ **6.** $\frac{t}{5} = 10$

7. $\frac{2x}{3}=18$ **8.** $1.6=\frac{y}{1.5}$ **9.** $7x-9=16$

10. $14y-8=13$ **11.** $17+6p=9$ **12.** $\frac{x}{3}+1=\frac{7}{15}$

2.3 कश्चित् अनुप्रयोगः

वयम् एकेन सरलेन उदाहरणेन आरम्भं कुर्मः।

द्वयोः संख्ययोः योगः 74 अस्ति। तेषु एका संख्या द्वितीयतः 10 अधिका अस्ति। ते सङ्ख्ये के स्तः ? एषा एका प्रहेलिका इव अस्ति। वयम् उभयोः कामपि संख्यां न जानीमः तथा तां ज्ञातुम् इच्छामः। वयं नियमद्वयं प्राप्तवन्तः -

(i) एका संख्या द्वितीयतः 10 अधिका अस्ति तथा

(ii) तयोः योगः 74 अस्ति। वयं सप्तम कक्ष्यायां शिक्षितवन्तः यत् एतादृशीं समस्यां कथम् आरम्भं करिष्यामः। वयम् एवं स्वीकुर्मः यत् लघु संख्या x अस्ति तदा बृहत् संख्या x इत्यतः 10 अधिका अर्थात् $x+10$।

द्वितीयः नियमः अस्ति यत् सङ्ख्ययोः योगः 74 अस्ति।

अतः $x+(x+10)=74$

अथवा $2x+10=74$

10 संख्यां दक्षपक्षे पक्षान्तरणे सति $2x=74-10$

अथवा $2x=64$

उभयोः पक्षयोः 2 इत्यनेन विभाजयामः चेत् $x=32$

अर्थात् लघु संख्या वर्त्तते 32 तथा द्वितीया बृहत् संख्या वर्त्तते $x+10=32+10=42$

अर्थात् अपेक्षितयोः सङ्ख्ययोः 32 तथा 42 वर्तेते। अथवा अनयोः योगः 74 अस्ति तथा एका अपरस्याः 10 अघिका अस्ति। अस्य विधेः कानिचन उदाहरणानि पश्यामः।

उदाहरणम् 5 परिमेय-संख्या $\frac{-7}{3}$ इति संख्यायाः द्विगुणिते वयं किं योजयामः यस्मात् योगः $\frac{3}{7}$ इति प्राप्नुमः ?

समाधानम् परिमेय-संख्या $\frac{-7}{3}$ इति संख्यायाः द्विगुणितम् अस्ति $2\times\left(\frac{-7}{3}\right)=\frac{-14}{3}$

स्वीकुर्मः यत् x योजने सति $\frac{3}{7}$ इति प्राप्नुमः। अतः $x+\left(\frac{-14}{3}\right)=\frac{3}{7}$

अथवा $x-\frac{14}{3}=\frac{3}{7}$

अथवा $x=\frac{3}{7}+\frac{14}{3}$ ($\frac{-14}{3}$ इत्यस्य दक्षपक्षे पक्षान्तरणे कृते सति।)

$=\frac{(3\times3)+(14\times7)}{21}=\frac{9+98}{21}=\frac{107}{21}$

एवमेव $\frac{3}{7}$ प्राप्तुं $2\times\left(\frac{-7}{3}\right)$ इत्यनेन $\frac{107}{21}$ योक्तव्यं भवेत्।

उदाहरणम् 6 एकस्य आयतस्य परिमापनं 13 सेमी अस्ति तथा तस्य वैशाल्यं $2\frac{3}{4}$ सेमी अस्ति। तस्य दीर्घतां जानन्तु।

समाधानम् स्वीकुर्मः यत् आयतस्य दीर्घता x सेमी अस्ति।

आयतस्य परिमापनं 2 × (दीर्घता + वैशाल्यं)

$$=2\times\left(x+2\frac{3}{4}\right)=2\times\left(x+\frac{11}{4}\right)$$

परिमापनं 13 सेमी इति प्रदत्तम् अस्ति।

अतः $$2\left(x+\frac{11}{4}\right)=13$$

अथवा $$x+\frac{11}{4}=\frac{13}{2}$$

उभयोः पक्षयोः 2 इत्यनेन विभाजयामः चेत्

अथवा $x=\frac{13}{2}-\frac{11}{4}$ ($\frac{11}{4}$ इत्यस्य दक्षपक्षे पक्षान्तरणे सति)

$$=\frac{26}{4}-\frac{11}{4}=\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}$$

आयतस्य दीर्घता $3\frac{3}{4}$ सेमी अस्ति।

उदाहरणम् 7 साहिलस्य मातुः वर्त्तमान-आयुः साहिलस्य वर्त्तमान-आयुतः त्रिगुणः अस्ति। 5 वर्षानन्तरं द्वयोः आयुः 66 वर्षाणि भविष्यति। तयोः वर्त्तमान-आयुं जानन्तु।

समाधानम् स्वीकुर्मः यत् साहिलस्य वर्त्तमान-आयुः xअस्ति।

वयं साहिलस्य आयुः 5 वर्षानन्तरं x इति स्वीकृत्य अपि चलितुं शक्नुमः। भवन्तः एवमेव चलित्वा प्रयत्नं कुर्वन्तु।

	साहिलः	अम्बा	योगः
वर्तमान - आयुः	x	3x	
5 वर्षानन्तरम् आयुः	x+5	3x+5	4x+10

तयोः आयुषः योगः 66 वर्षाणि प्रदत्तः अस्ति।

अतः $$4x+10=66$$

अस्मिन् समीकरणे x साहिलस्य वर्तमान-आयुः वर्त्तते। समीकरणं समाधातुं 10 दक्षपक्षे पक्षान्तरणं कुर्मः।

$$4x=66-10$$

अथवा $$4x=56$$

अथवा $x=\frac{56}{4}=14$ (समाधानम्)

एवं प्रकारेण साहिलस्य वर्तमान-आयुः 14 वर्षाणि सन्ति। तथा तस्य मातुः 42 वर्षः अस्ति। भवन्तः परीक्षणं कर्तुं शक्नुवन्ति यत् 5 वर्षानन्तरं तयोः आयुषः योगः 66 वर्षाणि भविष्यति।

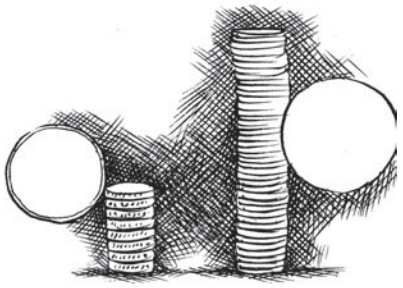
उदाहरणम् 8 बंशीमहोदयस्य पार्श्वे कानिचन पणकानि रु. 2 संख्यात्मकानि सन्ति अथ कानिचन रु. 5 संख्यात्मकानि सन्ति। यदि रु. 2 संख्यात्मकानां पणकानां संख्या रु. 5 संख्यात्मक-पणकतः त्रिगुणा वर्तते। तथा तस्य मूल्यस्य सम्पूर्ण-योगः रु. 77 अस्ति तर्हि उभयोः प्रकारकयोः पणकयोः संख्यां जानन्तु।

समाधानम् स्वीकुर्मः यत् बंशीमहोदयस्य पार्श्वे रु. 5 संख्यात्मकस्य पणकस्य संख्या xअस्ति।

तर्हि रु. 2 संख्यात्मकस्य पणकस्य संख्या $= 3x$

अतः (i) रु. 5 संख्यात्मकस्य x पणकस्य मूल्यं $= 5 \times x =$ र

तथा (ii) रु. 2 संख्यात्मकस्य $3x$ पणकस्य मूल्यं $= 2 \times 3x =$



अतः सम्पूर्ण-मूल्यं $= 5x+6x=$रु.$11x$

सम्पूर्णं मूल्यं प्रदत्तम् अस्ति रु.77

अतः $11x = 77$

अथवा $x = \frac{77}{11} = 7$ (उभौ पक्षौ 11 इत्यनेन विभाजयामः चेत्)

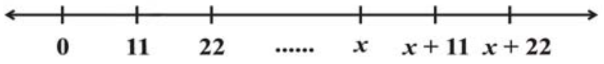
अर्थात् रु. 5 संख्यात्मकस्य पणकस्य संख्या $x=7$

तथा रु. 2 संख्यात्मकस्य पणकस्य संख्या $= 3x=21$

भवन्तः परीक्षितुं शक्नुवन्ति यत् एतयोः द्वयोः मूल्यं रु.77 एव भवति।

उदाहरणम् 9 यदि 11 संख्यात्मकस्य सततं त्रयस्य गुणजस्य योगः 363 अस्ति तर्हि तत् जानन्तु।

समाधानम् यदि 11 संख्यात्मकस्य गुणजः x अस्ति तदा अग्रिमः गुणजः भविष्यति $x+11$ ततः तस्य अग्रिमः गुणजः भविष्यति $x+11+11$ अथवा $x+22$।



प्रदत्तम् अस्ति यत् 11 संख्यात्मकस्य सततं त्रयाणां गुणजानां योगः 363 अस्ति। एतेन वयं निम्न-समीकरणं प्राप्नुमः -

$$x+(x+11) + (x+22) = 363$$

अथवा $x+x+11+x+22 = 363$

अथवा $3x+33 = 363$

अथवा $3x = 363-33$

अथवा $3x = 330$

अथवा $x = \frac{330}{3} = 110$

अर्थात् एते त्रयः गुणजाः 110, 121 तथा 132 सन्ति।

वयम् अत्र पश्यामः यत् समस्या विभिन्न-प्रकारेण कथं समाधानीया।

> वैकल्पिक-समाधानम् - 11 संख्यात्मकस्य त्रिषु सातत्य-गुणजेषु मध्यः गुणजः x स्वीकुर्मः। एतत् पूर्वतनः गुणजः भवेत् $x-11$ तथा एतदनन्तरं गुणजः भविष्यति $x+11$ अतः समीकरणं भविष्यति - $(x-11)+ x+(x+11)=363$
>
> अथवा $3x=363$ उभौ पक्षौ 3 इत्यनेन विभाजयामः
>
> $x = \frac{363}{3} = 121$
>
> एवं रीत्या $x=121$, $x-11=110$, $x+11=132$
>
> अतः 11 संख्यात्मकस्य त्रयः गुणजाः 110, 121 तथा 132 इति।

उदाहरणम् 10 द्वयोः पूर्ण-संख्ययोः अन्तरं 66 अस्ति यदि तयोः 2 : 5 इत्यस्य अनुपातः अस्ति तां संख्यां जानन्तु।

समाधानम् यतो हि उभे संख्ये 2 : 5 इत्यस्य अनुपाते स्तः, अतः वयम् एकां संख्यां 2x तथा अपरां 5x इति स्वीकुर्मः। स्वीकुर्मः।

(ध्यानं ददतु 2x : 5x इत्यस्मिन् 2 : 5 इत्यस्य अनुपातः अस्ति।)

एतयोः अंतरम् अस्ति 5x-2x यत् 66 इत्यस्य समानम् अस्ति।

अतः $5x-2x= 66$

अथवा $3x= 66$

अथवा $x= 22$

यतो हि संख्या 2x तथा 5x अस्ति। अतः संख्याः अभवन् 2×22 तथा 5×22 अर्थात् 44 तथा 110 एवम् अस्य अन्तरं $110 - 44 = 66$ एव अस्ति यत् वाञ्छितं वर्तते।

उदाहरणम् 11 देवेश्याः पार्श्वे रु.50, रु.20 तथा रु.10 संख्यकानां सर्वम् आहत्य 25 मुद्रणानि सन्ति येषां मूल्यं रु. 590 भवति। यदि रु. 50 तथा रु.20 संख्यायाम् अनुपातः 3 : 5 अस्ति तर्हि प्रत्येक-प्रकारकाणां मुद्रणानां संख्यां जानन्तु।

समाधानम् स्वीकुर्मः यत् रु.50 तथा रु.20 संख्यात्मकस्य मुद्रणस्य संख्या क्रमशः 3x तथा 5x अस्ति।

परन्तु समस्त मुद्रणानां संख्या 25 अस्ति।

अतः रु.10 संख्यात्मकस्य मुद्रणस्य संख्या $=25-(3x+5x)=25-8x$

एतादृशात् मुद्रणकारणात् तस्य पार्श्वे धनमभवत्

रु. 50 संख्यात्मक-मुद्रणात् $3x\times50=$रु.$150x$

रु. 20 संख्यात्मक-मुद्रणे $5x\times20=$रु.$100x$

रु. 10 संख्यात्मक-मुद्रणे $(25-8x)\times10=$रु.$(250-80x)$

तथा सर्वम् आहत्य धनम् अभवत् $=150x+100x+(250-80x)$

$=$ रु. $(170x+250)$

एतत् धनं रु. 590 इत्यस्य समानं जातम्। अतः $170x+250=590$

अथवा $170x=590-250=340$

अथवा $x=\frac{340}{170}=2$

अर्थात् देवेश्याः पार्श्वे रु.50 संख्यात्मकं मुद्रणम् $=3x$

$= 3\times2=6$ मुद्रणम्

रु. 20 संख्यात्मक-मुद्रणम् $= 5x=5\times2=10$ मुद्रणम्

तथा रु. 10 संख्यात्मक-मुद्रणम् $= 25-8x$

$= 25-(8\times2)=25-16=9$

प्रश्नावली 2.2

1. यदि भवन्तः कस्याः अपि संख्यायाः $\frac{1}{2}$ व्यवकलने सति परिणामं $\frac{1}{2}$ इत्यनेन सह गुणने सति $\frac{1}{8}$ प्राप्नुवन्ति तर्हि सा संख्या का भविष्यति ?

2. एकस्य आयताकारस्य तरण-तालस्य औन्नत्यं तस्य वैशाल्यस्य द्विगुणितात् 2 मीटर अधिकम् अस्ति। यदि अस्य परिमापनं 154 मीटर पर्यन्तम् अस्ति तर्हि अस्य औन्नत्यं वैशाल्यञ्च जानन्तु।

3. एकस्य समद्विबाहु-त्रिभुजस्य आधारः $\frac{4}{3}$ सेमी अस्ति तथा तस्य परिमापनं $4\frac{2}{15}$ सेमी अस्ति। तस्य समानयोः द्वयोः भुजयोः मापनं जानन्तु।

4. द्वयोः संख्ययोः योगः 95 अस्ति। यदि एका संख्या अपरसंख्यातः 15 अधिका अस्ति तर्हि संख्याद्वयं जानन्तु।

5. द्वयोः संख्ययोः अनुपातः 5: 3 अस्ति। यदि तयोः अन्तरं 18 अस्ति तर्हि संख्यां जानन्तु।

6. त्रयाणां सतत-पूर्णाङ्कानां योगः 51 अस्ति। पूर्णाङ्कं जानन्तु।

7. 8 इत्यस्य सतत-गुणजानां योगः 888 अस्ति। गुणजं जानन्तु।

8. सतत-पूर्णाङ्क-वर्धनक्रमे स्वीकृत्य तान् क्रमशः 2, 3 तथा 4 इत्यनेन गुणयामः चेत् तेषां योगफलं 74 भवति। त्रीन् पूर्णाङ्कान् जानन्तु।

9. राहुलस्य हारुनस्य च आयुषोः अनुपातः 5:7 अस्ति। 4 वर्षानन्तरं तयोः आयुषोः योगः 54 वर्षाणि भविष्यति। तयोः वर्तमान-आयुः कः ?

10. कस्यामपि कक्ष्यायां बालकानां बालिकानाञ्च संख्यासु अनुपातः 7:5 अस्ति। यदि बालकानां संख्या बालिकानां संख्यातः 8 इत्यनेन अधिका अस्ति तर्हि कक्ष्यायाम् आहत्य कति विद्यार्थिनः सन्ति ?

11. बाइचुंगस्य पिता तस्य पितामहात् 26 वर्षाणि कनिष्ठः वर्त्तते। तस्मात् 29 वर्षाणि ज्येष्ठः वर्त्तते। यदि तेषां त्रयाणाम् आयोः योगः 135 वर्षाणि सन्ति तर्हि तेषाम् आयुं पृथक्-पृथक् जानन्तु।

12. 15 वर्षानन्तरं रवेः आयुः तस्य वर्त्तमान-आयुतः चतुर्गुणः भविष्यति। रवेः आयुः?

13. एकां परिमेय-संख्यां $\frac{5}{2}$ इत्यनेन गुणयित्वा $\frac{2}{3}$ योजयामः चेत् $-\frac{7}{12}$ प्राप्तिः भवति। सा संख्या का ?

14. लक्ष्मीः एकस्मिन् वित्तकोषे कोषाध्यक्षा अस्ति। तस्याः पार्श्वे पणक-रूपेण रु.100, रु.50 तथा रु.10 संख्यात्मकानि रुप्यकाणि सन्ति। तेषु संख्यासु क्रमशः 2: 3 : 5 अनुपातः अस्ति तथा तस्य मूल्यं रु.4,00,000 अस्ति। तस्याः पार्श्वे प्रत्येक-प्रकारकं कति मुद्रणम् अस्ति ?

15. मम पार्श्वे रु.300 मूल्यस्य रु.1, रु.2 तथा रु.5 संख्यात्मकं पणकम् अस्ति। रु.2 संख्यात्मकानां पणकानां संख्या रु.5 संख्यात्मकस्य पणकस्य त्रिगुणा वर्तते तथा पणकानां संख्या 160 अस्ति। मम पार्श्वे प्रत्येक-प्रकारकाणि कति पणकानि सन्ति ?

16. एकस्यां निबन्ध-प्रतियोगितायाम् आयोजकाः निश्चितवन्तः यत् प्रत्येक-विजेतृभ्यः रु.100 तथा विजेतारं परित्यज्य प्रत्येक-प्रतिभागिने रु.25 इति पुरस्कार-रूपेण दास्यन्ति। यदि पुरस्कार-रूपेण विभाजितः राशिःरु.3,000 आसीत् तर्हि आहत्य 63 प्रतिभागिषु कति विजेतारः भविष्यन्ति ?

2.4 समीकरण-समाधानं यदा उभयोः पक्षयोः चरः उपस्थितः स्यात्।

एकस्मिन् समीकरणे, उभयोः बीजीय-व्यञ्जकयोः माने समता भवति। समीकरणं 2x-3=7 इत्यस्मिन् एकः व्यञ्जकः अस्ति 2x-3 तथा द्वितीयः 7 अस्ति। इदानीं यावत् प्रायः सर्वेषु उदाहरणेषु दक्षपक्षे एका एव संख्या आसीत् परन्तु एवं सर्वदा भवेत् इति आवश्यकं नास्ति। चरराशिः उभयोः पक्षयोः भवितुम् अर्हति। उदाहरणार्थम् 2x-3=x+2 इति समीकरणे उभयोः पक्षयोः चरीय व्यञ्जकः अस्ति (2x-3) तथा दक्षपक्षे (x+2) अस्ति।

- साम्प्रतं वयम् एतादृशं समीकरणं समाधातुं चर्चयामः यस्य उभयोः पक्षयोः चरीय व्यञ्जकाः स्युः।

उदाहरणम् 12 समाधानं कुर्वन्तु $2x-3=x+2$

समाधानम् प्रदत्तम् अस्ति - $2x=x+2+3$

अथवा $2x=x+5$

अथवा $2x-x=x+5-x$ (उभय-पक्षात् x व्यवकलने सति)

अथवा $x=5$ (समाधानम्)

अत्र वयं समीकरणस्य उभय पक्षात् एकां संख्याम् उत स्थिराङ्कम् एव न अपितु चरीय-पदम् एव व्यवकलितवन्तः। वयम् एवं कर्तुं शक्नुमः यतो हि चरस्य मानं कापि संख्या एव भवति। ध्यानं ददतु यत् x इति उभय पक्षात् व्यवकलनेन तात्पर्यम् अस्ति यत् x इत्यस्य वामपक्षे पक्षान्तरणम्।

उदाहरणम् 13 समाधानं कुर्वन्तु $5x+\frac{7}{2}=\frac{3}{2}x-14$

समाधानम् उभौ पक्षौ 2 इत्यनेन गुणयामः -

$$2\times(5x+\frac{7}{2}) = 2\times\left(\frac{3}{2}x-14\right)$$

अथवा $(2\times5x)+\left(2\times\frac{7}{2}\right)=\left(2\times\frac{3}{2}x\right)-(2\times14)$

अथवा $10x+7=3x-28$

अथवा $10x-3x+7=-28$ (3xइति वामपक्षे पक्षान्तरणे सति)

अथवा $7x+7=-28$

अथवा $7x=-28-7$

अथवा $7x=-35$

अथवा $x=\frac{-35}{7}$

अथवा $x=-5$ (समाधानम्)

प्रश्नावली 2.3

निम्न-समीकरणानां समाधानं कुर्वन्तु अथ स्व-उत्तरस्य परीक्षणं कुर्वन्तु।

1. $3x=2x+18$ **2.** $5t-3=3t-5$ **3.** $5x+9=5+3x$

4. $4z+3=6+2z$ 5. $2x-1=14-x$ 6. $8x+4=3(x-1)+7$

7. $x = \frac{4}{5}(x+10)$ 8. $\frac{2x}{3}+1=\frac{7x}{15}+3$ 9. $2y+\frac{5}{3}=\frac{26}{3}-y$

10. $3m=5m-\frac{8}{5}$

2.5 कानिचन अन्यानि उदाहरणानि

उदाहरणम् 14 अङ्कद्वयात्मिकायाः एकसंख्यायाः उभयोः अङ्कयोः 3 इत्यस्य अन्तरं वर्तते। अस्यां संख्यायाम् अस्य अङ्कान् परिवर्त्य प्राप्त-संख्यां मूल-सङ्ख्यया सह योजयामः चेत् 143 प्राप्यते।

समाधानम् उदाहरणार्थम् अङ्कद्वयात्मिका काचित् एका संख्या यथा 56 स्वीकुर्मः। एतत् एवं रीत्या अपि लेखितुं शक्यते -$56=(10\times5)+6$

अस्याः संख्यायाः अङ्कं परिवर्तने सति संख्या प्राप्ता भवति 65 इति एतत् एवमपि लेखितुं शक्यते $65=(10\times6)+5$

वयं अङ्कद्वयात्मिकायां संख्यायाम् एककस्य अङ्कः b इति स्वीकुर्मःयतोहि उभयोः अङ्कयोः अन्तरं 3 अस्ति। अतः दशकस्य अङ्कः $=b+3$

अर्थात् अङ्कद्वयात्मिका संख्या -

$=10\,(b+3)+b=10b+30+b=11b+30$

अङ्कं परिवर्तयामः चेत् एषा सङ्ख्या प्राप्यते$10b+(b+3)=11b+3$

यदि एककस्य अङ्कः b इति अस्ति तर्हि किं वयं दशकस्य अङ्कः (b-3) इति ग्रहीतुं शक्नुमः ? गृहीत्वा पश्यन्तु किम् उत्तरं लभ्यते।

एतयोः द्वयोः संख्ययोः योजने सति प्राप्तिः भवति - 143 इति।

अतः $(11b+30)+(11b+3)=143$

अथवा $11b+11b+30+3=143$

अथवा $22b+33=143$

अथवा $22b=143-33$

अथवा $22b=110$

अथवा $b=\frac{110}{22}$

अथवा $b=5$

ध्यानं ददतु एतत् समाधानं यदा वयं दशकस्य अङ्कः एककात् 3 अधिकं स्वीकृतवन्तः। पश्यन्तु किं समाधानं मिलति यदा वयं दशकस्य अङ्कं (b-3) इति रूपे स्वीकुर्मः।

अर्थात् एककस्य अङ्कः =5

तदा दशकस्य अङ्कः = 5+3=8

अतः संख्या = 85

उदाहरणस्य कथनं 58 तथा 85 उभयोः संख्ययोः कृते सत्यम् अस्ति अतः उभौ अपि उत्तरौ समीचीनौ स्तः।

परीक्षणम् - अङ्कं परिवर्त्तने सति संख्या प्राप्ता भवति।

58 इति तथा 58 एवं 85 इत्यस्य योगः 143 यथा प्रदत्तम् अस्ति।

उदाहरणम् 15 अर्जुनस्य आयुः श्रीयायाः आयुतः द्विगुणः वर्त्तते। 5 वर्षेभ्यः पूर्वं तस्य आयुः श्रीयायाः आयुषः त्रिगुणः आसीत्। उभयोः आयुः जानन्तु।

समाधानम् स्वीकुर्मः यत् श्रीयायाः वर्त्तमान-आयुः = x वर्षाणि।

तदा अर्जुनस्य वर्त्तमान-आयुः =2x वर्षाणि

श्रीयायाः 5 वर्षेभ्यः पूर्वं आयुः आसीत् (x-5) वर्षाणि

तथा अर्जुनस्य 5 वर्षेभ्यः पूर्वं आयुः आसीत् (2x-5) वर्षः

प्रदत्तम् अस्ति यत् 5 वर्षेभ्यः पूर्वं अर्जुनस्य आयुः श्रीयायाः आयुषः त्रिगुणः आसीत्।

अतः $2x-5=3(x-5)$

अथवा $2x-5=3x-15$

अथवा $15-5=3x-2x$

अथवा $10=x$

अतः श्रीयायाः वर्तमान-आयुः $= x=10$ वर्षाणि

तथा अर्जुनस्य वर्त्तमान-आयुः $= 2x=2\times10=20$ वर्षाणि

प्रश्नावली 2.4

1. अमीना एकां संख्यां विचारयति सा तस्याः $\frac{5}{2}$ इति व्यवकलनं करोति परिणामं 8 इत्यनेन सह गुणनं करोति इदानीं यः परिणामः आगतः सः विचारितायाः संख्यायाः त्रिगुणः वर्तते। तां विचारित-संख्यां जानन्तु।
2. द्वयोः संख्ययोः प्रथमा संख्या द्वितीयायाः संख्यायाः 5 गुणिता अस्ति। प्रत्येक-सङ्ख्यया सह 21 योजयामः प्रथमा संख्या द्वितीयायाः द्विगुणिता भवति। संख्यां जानन्तु।
3. प्रदीयमाना अङ्कद्वयात्मिका या एका-संख्या वर्तते तस्याः अङ्कानां योगः 9 इति अस्ति। अस्याः संख्यायाः अङ्कानां स्थानं परिवर्तयामः चेत् प्राप्त-संख्या प्रदीयमाना संख्यातः 27 अधिका अस्ति। दीयमानां संख्यां जानन्तु।
4. प्रदीयमाना अङ्कद्वयात्मिका या एका-संख्या वर्तते तस्याम् एकः अङ्कः द्वितीय-अङ्कात् त्रिगुणितः अस्ति। एतेषाम् अङ्कानां स्थानं परिवर्त्य प्राप्त-संख्यां दीयमानया सङ्ख्यया सह योजयामः चेत् 88 इति लभ्यते। दीयमानां संख्यां जानन्तु।
5. शोबो इति नामधेयस्य मातुः आयुः शोबो इत्यस्य आयुषः षड्गुणितः वर्त्तते। 5 वर्षेभ्यः अनन्तरम् शोबो नामधेयस्य आयुः तस्य मातुः वर्तमान-आयुषः तृतीयांशः भविष्यति। तस्य आयुः जानन्तु।
6. महूली ग्रामे एकः सङ्कुचितः आयताकारः भूखण्डः विद्यालयं निर्मातुं सुरक्षितः अस्ति। अस्य भूखण्डस्य औन्नत्ये वैशाल्ये च 11: 4 इत्यस्य अनुपातः अस्ति। ग्राम-पंचायतः अस्य भूखण्डस्य सीमां कारयितुं रु.100 प्रति मीटर परिमितं मात्रया रु.75000 दातव्या भविष्यति। भूखण्डस्य परिमापं जानन्तु।

7. हसनः विद्यालय-गणवेषं निर्मातुं द्वि-प्रकारकं वस्त्रं क्रीणाति। एतस्मिन् युतकस्य वस्त्रस्य मूल्यं 50 रुप्यं प्रति मीटर-परिमितं तथा ऊरुकस्य वस्त्रस्य मूल्यं 90रु. प्रति मीटर परिमितम् अस्ति। सः युतकस्य प्रत्येकं 3 मीटर-परिमितं वस्त्रस्य कृते ऊरुकस्य 2 मीटर परिमितं वस्त्रं क्रीणाति। सः एतत् वस्त्रं क्रमशः 12% तथा 10% लाभाय विक्रीय 36,600 रु. प्राप्नोति। सः ऊरुकाय कियत् वस्त्रं क्रीतवान्?

8. मृगाणाम् एकस्य समूहस्य अर्धभागः क्षेत्रे चरति तथा अवशिष्टस्य ¾ भागः पार्श्वे एव खेलति अवशिष्टः नवसंख्यात्मकः मृगः सरोवरे जलं पिबन्ति । समूहे मृगाणां संख्या का इति जानन्तु ?

9. पितामहस्य आयुः स्व पौत्र्यः आयुषः दशगुणितः अस्ति । यदि पितामहस्य आयुः पौत्र्यः आयोः 54 वर्षम् अधिकम् अस्ति तर्हि तयोः आयुं जानन्तु ।

10. अमनस्य आयुः तस्य पुत्रस्य आयुषः त्रिगुणितः अस्ति । 10 वर्षेभ्यः पूर्वं तस्य आयुषः पुत्रस्य आयोः 5 गुणितः अस्ति । तयोः वर्तमान-आयुं जानन्तु ।

2.6 समीकरणं सरलरूपे परिवर्त्तनम्

उदाहरणम् 16 : समाधानं करोतु - $\frac{6x+1}{3}+1=\frac{x-3}{6}$

> 6 इत्यनेन एव कथं ? ध्यानं ददतु हराणां ल.स.प 6 अस्ति ।

समाधानम् - उभौ पक्षौ 6 तः गुणाकारे सति

$$\frac{6(6x+1)}{3} + 6\times1= \frac{6(x-3)}{6}$$

अथवा $2(6x+1)+6=x-3$

अथवा $12x+2+6=x-3$ (कोष्ठकम् अपसारणे सति)

अथवा $12x+8=-3$

अथवा $12x-x+8=-3$

अथवा $11x+8=-3$

अथवा $11x=-3-8$

अथवा $11x=-11$

अथवा $x=-1$ (वांछितं समाधानम्)

परीक्षणम् - वामपक्षः $\frac{6(-1)+1}{3}+1=\frac{-6+1}{3}+1=\frac{-5}{3}+\frac{3}{3}=\frac{-5+3}{3}=\frac{-2}{3}$

दक्षपक्षः $=\frac{(-1)-3}{6}=\frac{-4}{6}=\frac{-2}{3}$ वामपक्षः=दक्षपक्षः(यथावांछितम् आसीत्)

उदाहरणम् 17 समाधानं करोतु $-5x-2\ (2x-7)=2\ (3x-1)+\frac{7}{2}$

समाधानम् - (कोष्ठके अपसारणे सति)

वामपक्षः $= 5x-4x+14=x+14$

दक्षपक्षः $= 6x-2+\frac{7}{2} = 6x - \frac{4}{2}+\frac{7}{2} = 6x+\frac{3}{2}$

अतः समीकरणम् $x+14 = 6x + \frac{3}{2}$ अस्ति।

अथवा $14=6x-x+\frac{3}{2}$

अथवा $14=5x+\frac{3}{2}$

अथवा $14-\frac{3}{2} =5x$ ($\frac{3}{2}$ इत्यस्य पक्षान्तरणे सति)

अथवा $\frac{28-3}{2} =5x$

अथवा $\frac{25}{2}=5x$

अथवा $x=\frac{25}{2}\times\frac{1}{5} = \frac{5\times5}{2\times5} = \frac{5}{2}$

किं भवन्तः ध्यानं दत्तवन्तः यत् वयं समीकरणं कथं सरलीकृतवन्तः ? वयं समीकरणस्य उभौ पक्षौ अपि समीकरणे व्यञ्ज्जकेषु पदानां हराणां ल.स.प इत्यनेन गुणितवन्तः।

अतः वांछितं समाधानम् अस्ति $x = \frac{5}{2}$

परीक्षणम् - वामपक्षः $= 5 \times\frac{5}{2}-2\left(\frac{5}{2}\times2-7\right)$

$$=\frac{25}{2}-2\ (5-7) = \frac{25}{2}-2\ (-2)=\frac{25}{2}+4= \frac{25-8}{2} = \frac{32}{2}$$

दक्षपक्षः $= 2\left(\frac{5}{2}\times3-1\right)+\frac{7}{2}$

$$= 2\left(\frac{15}{2}-\frac{2}{2}\right)+\frac{7}{2} = \frac{2\times13}{2} + \frac{7}{2}$$

$$= \frac{26+7}{2} = \frac{32}{2} =$$ (यथा वाञ्छितम् आसीत्)

ध्यानं ददतु अस्मिन् उदाहरणे वयं कोष्ठकम् अपसार्य तथा उभय-पक्षयोः समानपदं मेलयित्वा समीकरणं सरलीकृतवन्तः।

प्रश्नावली 2.5

निम्न-रैखिक-समीकरणानां समाधानं कुर्वन्तु।

1. $\frac{x}{2} - \frac{1}{5} = \frac{x}{3} + \frac{1}{4}$ **2.** $\frac{n}{2} - \frac{3n}{4} + \frac{5n}{6} = 21$ **3.** $x+7- \frac{8x}{3} = \frac{17}{6} - \frac{5x}{2}$

4. $\frac{x-5}{3} = \frac{x-3}{5}$ **5.** $\frac{3t-2}{4} - \frac{2t+3}{3} = \frac{2}{3} -t$

6. $m- \frac{m-1}{2} =1- \frac{m-2}{3}$

निम्न-समीकरणं सरलरूपे परिवर्त्य समाधानं कुर्वन्तु ।

7. $3(t-3)=5(2t+1)$

8. $15(y-4)-2(y-9)+5(y+6)=0$

9. $3(5z-7)-2(9z-11)=4(8z-13)-17$

10. $0.25(4f-3)=0.05(10f-9)$

2.7 रैखिकरूपे परिवर्तमानं समीकरणम्

उदाहरणम् 18 : समाधानं कुर्वन्तु - $\frac{x+1}{2x+3}=\frac{3}{8}$

समाधानम् - ध्यानं ददतु एतत् समीकरणं रैखिकं नास्ति यतो हि अस्य वामपक्षे व्यञ्जकः रैखिकः नास्ति परन्तु एतत् वयं रैखिक-समीकरण-रूपे परिवर्तयितुं शक्नुमः । वयं समीकरणस्य उभयं पक्षं (2x+3) इत्यनेन सह गुणनं कर्तुं शक्नुमः ।

$$\left(\frac{x+1}{2x+3}\right)\times(2x+3)=\frac{3}{8}\times(2x+3)$$

ध्यानं ददतु
$2x+3\neq0$

(2x+3) इति वामपक्षे निरस्तं भवति तथा वयं प्राप्नुमः ।

$$x+1=\frac{3(2x+3)}{8}$$

साम्प्रतं वयम् एकं रैखिकसमीकरणं प्राप्तवन्तः यस्मात् वयं समाधानं जानीमः ।
उभौ पक्षौ 8 इत्यनेन गुणनं कुर्मः ।

$8(x+1)=3(2x+3)$

अथवा $8x+8=6x+9$

अथवा $8x=6x+9-8$

अथवा $8x=6x+1$

अथवा $8x-6x=1$

अथवा $2x=1$

अथवा $x=\frac{1}{2}$

एतत् चरणं वज्र-गुणनप्रक्रियातः अपि प्राप्तुंशक्नोति - $\frac{x+1}{2x+3}\times\frac{3}{8}$

अतः समाधानम् - $x=\frac{1}{2}$ अस्ति ।

परीक्षणम् - वामपक्षे अंशः $=\frac{1}{2}+1 \quad \frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$ अस्ति ।

वामपक्षे हरः - $2x+3=2\times\frac{1}{2}+3=1+3=4$ अस्ति ।

अतः वामपक्षः $=$ अंशः $\div$ हरः $=\frac{3}{2}\div4=\frac{3}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$
अर्थात् वामपक्षः = दक्षपक्षः ।

उदाहरणम् 19 अनोः राज्ञः च वर्तमान-आयुषः अनुपातः 4: 5 अस्ति। 8 वर्षेभ्यः पश्चात् तयोः आयुषोः अनुपातः 5: 6 भविष्यति। तयोः वर्तमान-आयुः जानन्तु।

समाधानम् -स्वीकुर्मः यत् अनोः राज्ञः च वर्तमान-आयुः क्रमशः 4 x तथा 5 x अस्ति।

8 वर्षेभ्यः पश्चात् महोदयस्य आयुः = (4x+8) वर्षाणि।

8 वर्षेभ्यः पश्चात्राजस्य आयुः = (5x+8) वर्षाणि।

तयोः आयुषः अनुपातः = $\frac{4x+8}{5x+8}$, यत् दत्तम् अस्ति 5: 6

अतः $\frac{4x+8}{5x+8} = \frac{5}{6}$

वज्रगुणनं कुर्मः। $6(4x+8)=5(5x+8)$

अथवा $24x+48=25x+40$

अथवा $24x+48-40=25x$

अथवा $24x+8=25x$

अथवा $8=x$

अतः अनोः वर्तमान-आयुः $4x=4\times8=32$ वर्षाणि।

तथा राज्ञः वर्तमान-आयुः $5x=5\times8=40$ वर्षाणि।

प्रश्नावली 2.6

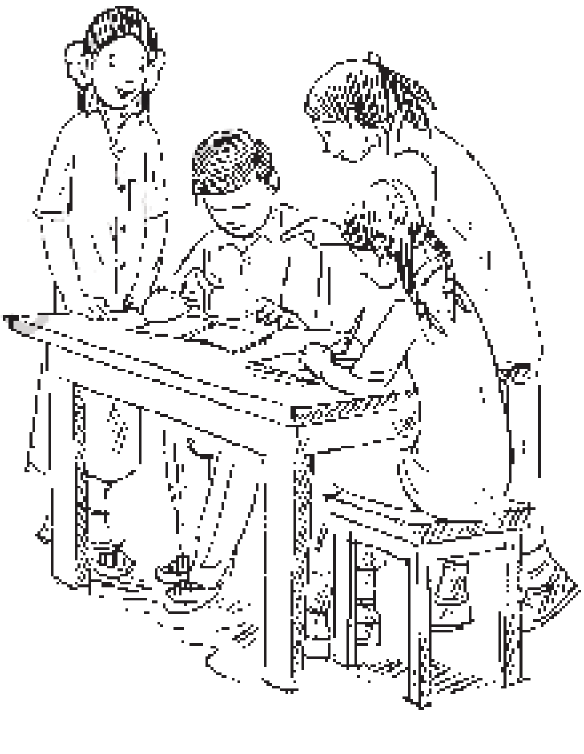
निम्न-समीकरणानां समाधानं कुर्वन्तु।

1. $\frac{8x-3}{3x} = 2$ **2.** $\frac{9x}{7-6x} = 15$ **3.** $\frac{z}{z+15} = \frac{4}{9}$

4. $\frac{3y+4}{2-6y} = \frac{-2}{5}$ **5.** $\frac{7y+4}{y+2} = \frac{-4}{3}$

6. हरेः हैर्यस्य च वर्तमान-आयुषः अनुपातः 5: 7 अस्ति। अधुना आरभ्य 4 वर्षं पश्चात् तयोः आयुषः अनुपातः 3: 4 भविष्यति। तस्य वर्तमान-आयुः जानन्तु।

7. एकस्याः परिमेय-संख्यायाः हरः तस्य अंशात् 8 अधिकः अस्ति। यदि अंशे 17 इत्यनेन योगः भवेत् तथा हरे 1 इति व्यवकलनं कुर्यात् तदा वयं $\frac{3}{2}$ प्राप्नुमः। तां परिमेय-संख्यां जानन्तु।

वयं किं चर्चितवन्तः ?

1. एकं बीजीय-समीकरणं चरेषु एकसमानं भवति । एतत् प्रकटीकरोति यत् समतायाः चिह्नस्य एकपक्षीय व्यञ्जकस्य तस्य अपरपक्षीय व्यञ्जकस्य च मानं समानम् एव अस्ति ।
2. vi, vii तथा viii कक्ष्यासु शिक्षमाणं समीकरणम् एकचरीय रैखिक-समीकरणम् अस्ति । एतेषु समीकरणेषु समीकरणनिर्मातृ व्यञ्जकेषु एकस्य एव चरस्य प्रयोगः भवति । एतदतिरिक्तम् एतत् समीकरणं रैखिकं भवति अर्थात् कृतप्रयोगस्य चरस्य अधिकतमः घातः 1 भवति ।
3. एकस्य रैखिक-समीकरणस्य समाधानं काचिदपि परिमेय-संख्या भवितुम् अर्हति ।
4. समीकरणस्य उभय-पक्षे कश्चित् रैखिक-व्यञ्जकः भवितुम् अर्हति । यत् समीकरणं वयं vi, vii कक्ष्ययोः शिक्षितवन्तः तेषु कस्मिंश्चित् एकस्मिन् पक्षे केवलं संख्या एव भवति ।
5. संख्यानाम् इव चरान् अपि एकपक्षतः अपरस्मिन् पक्षे पक्षान्तरितुं शक्यते ।
6. प्रायः समीकरण-सम्पादक-व्यञ्जकान् समाधानात् पूर्वं सरलीक्रियन्ते । आरम्भे किञ्चित् समीकरणं रैखिकं न भवति परन्तु तस्य उभयं पक्षम् उपयुक्त-व्यञ्जकेन सह गुणनं कृत्वा रैखिक-समीकरणरूपे परिवर्तयितुं शक्यते ।
7. रैखिक-समीकरणानाम् उपयोगिता तस्य विविध-अनुप्रयोगेषु अस्ति । संख्या-आयु-परिमाप-मुद्रारूपे प्रयुज्यमानं पणकं रुप्यकञ्च आधारीकृत्य विविध-प्रकारक-समस्याः रैखिकसमीकरणानाम् उपयोगं कृत्वा समाधातुं शक्यते ।